Том 25, № 132 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-345-358
УДК 517.988.38, 515.126.4

Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ[1] **, Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ**[2] **,**
Ирина Дмитриевна СЕРОВА[2]
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Some questions of the analysis of mappings of metric and partially ordered spaces

Tatiana V. ZHUKOVSKAIA[1] **, Evgeny S. ZHUKOVSKIY**[2] **, Irina D. SEROVA**[2]
[1] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Аннотация. Рассматриваются вопросы существования решений уравнений и достижимости минимальных значений функций. Все полученные утверждения объединены идеей существования для любого приближения к искомому решению или к точке минимума улучшенного приближения. Установлена взаимосвязь между рассматриваемыми задачами в метрических и частично упорядоченных пространствах. Также демонстрируется, как из полученных утверждений выводятся некоторые известные результаты о неподвижных точках и точках совпадения отображений метрических и частично упорядоченных пространств. Далее на основании аналогий в доказательствах всех полученных утверждений предлагается способ получения подобных результатов из доказываемой теоремы о выполнимости предиката следующего вида. Пусть $(X,\preceq)$ — частично упорядоченное пространство, отображение $\Phi: X\times X\to\{0,1\}$ удовлетворяет следующему условию: для любого $x\in X$ существует $x'\in X$ такой, что $x'\preceq x$ и $\Phi(x',x)=1.$ Рассматривается предикат $F(x)=\Phi(x,x),$ получены достаточные условия его выполнимости, т. е. существования решения уравнения $F(x)=1.$ Этот результат был анонсирован в [Жуковская Т.В., Жуковский Е.С. О выполнимости предикатов, заданных на частично упорядоченных // Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020). Тамбов, 2020, 34–36].

Ключевые слова: неподвижная точка; точка совпадения; минимум функции; частично упорядоченное пространство; выполнимый предикат

Благодарности: Раздел 1 написан первым автором, раздел 2 — третьим автором при поддержке РНФ (проект № 20-11-20131), раздел 3 — вторым автором при поддержке РФФИ (проект № 20-04-60524_Вирусы).

Для цитирования: *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Серова И.Д.* Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 345–358. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-345-358.

Abstract. The questions of existence of solutions of equations and attainability of minimum values of functions are considered. All the obtained statements are united by the idea of existence for any approximation to the desired solution or to the minimum point of the improved approximation. The relationship between the considered problems in metric and partially ordered spaces is established. It is also shown how some well-known results on fixed points and coincidence points of mappings of metric and partially ordered spaces are derived from the obtained statements. Further, on the basis of analogies in the proofs of all the obtained statements, we propose a method for obtaining similar results from the theorem being proved on the satisfiability of a predicate of the following form. Let $(X, \preceq)$ be a partially ordered space, the mapping $\Phi : X \times X \to \{0,1\}$ satisfies the following condition: for any $x \in X$ there exists $x' \in X$ such that $x' \preceq x$ and $\Phi(x', x) = 1$. The predicate $F(x) = \Phi(x, x)$ is considered, sufficient conditions for its satisfiability, that is, the existence of a solution to the equation $F(x) = 1$. This result was announced in [Zhukovskaya T.V., Zhukovsky E.S. Satisfaction of predicates given on partially ordered spaces // Kolmogorov Readings. General Control Problems and their Applications (GCP–2020). Tambov, 2020, 34-36].

Keywords: fixed point; coincidence point; minimum of function; partially ordered space; satisfiable predicate

Acknowledgements: Section 1 was written by the first author, section 2 by the third author with the support of the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131), section 3 by the second author with the support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-04-60524_Вирусы).

For citation: Zhukovskaia T.V., Zhukovskiy E.S., Serova I.D. Nekotoryye voprosy analiza otobrazheniy metricheskikh i chastichno uporyadochennykh prostranstv [Some questions of the analysis of mappings of metric and partially ordered spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 345–358. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-345-358. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

При исследовании различных математических задач часто используют приближения к решению. Если любое приближение допускает улучшение, то, как правило, удается доказать существование точного решения и получить формулу или алгоритм его нахождения. Примерами «улучшения приближений» являются итерационные методы решения и исследования уравнений и включений, в том числе неподвижных точек и точек совпадения. На построении итерационных последовательностей основаны известные результаты о неподвижных точках и точках совпадения: принцип сжимающих отображений Банаха (см. [1]), теорема Арутюнова о точке совпадения накрывающего и липшицева отображений (см. [2]), утверждения о свойствах точек совпадения (см. [3, 4]), многочисленные распространения и обобщения перечисленных результатов (см., например, [5–7] и библиографию этих работ). Рассмотрим, например, уравнение

$$f(x) = \varphi(x), \tag{0.1}$$

определяющее точку совпадения отображений $f, \varphi : X \to Y$, где $X = (X, \rho)$, $Y = (Y, \rho)$ — метрические пространства. Для «приближения» $\tilde{x} \in X$ к решению x уравнения (0.1) «улучшением» естественно считать достаточно «близкий» элемент $\tilde{x}' \in X$ такой, что $\rho\big(f(x'), \varphi(x')\big) < \rho\big(f(x), \varphi(x)\big)$. Несложно проверить, что члены x_{i+1} итерационных последовательностей в цитированных работах являются в этом смысле «улучшениями приближений» x_i. Идея использовать подобные «улучшения приближений» была явно сформулирована (как условие типа Каристи) и реализована А. В. Арутюновым в работе [8] для изучения задачи о минимуме вещественной функции, определенной на метрическом пространстве.

В работах [9–11] при изучении неподвижных точек и точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах выявились аналогии и глубокие связи с результатами для метрических пространств. Применявшиеся в этих работах подходы также были основаны на «улучшении приближений», поясним их на примере уравнения (0.1), где $f,\varphi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\preceq)$, $\mathcal{Y}=(\mathcal{Y},\preceq)$ — частично упорядоченные пространства. «Приближением» к решению $x\in\mathcal{X}$ уравнения (0.1) можно считать элемент $\tilde{x}\in\mathcal{X}$ такой, что $f(\tilde{x})\succeq\varphi(\tilde{x})$, а его «улучшением» — элемент $\tilde{x}'\in\mathcal{X}$, удовлетворяющий неравенствам $\tilde{x}'\preceq\tilde{x}$, $f(\tilde{x}')\succeq\varphi(\tilde{x}')$ (несколько иная трактовка «приближений» к решению уравнения (0.1) и их «улучшений» предлагается в данной работе). В [12] на аналогичной идее было основано исследование задачи о минимуме отображения, действующего в частично упорядоченных пространствах.

В данной статье для исследования уравнений и минимумов функций предлагается формализация идеи «улучшения приближений» в виде теорем существования решений соответствующих задач. Затем в статье получено общее утверждение о выполнимости предиката в частично упорядоченном пространстве, из которого при выборе подходящего предиката прямо следуют все полученные утверждения.

1. Улучшение приближений в метрическом пространстве

Классическим примером реализации идеи «улучшения приближений» является метод итераций в задаче о неподвижной точке сжимающего отображения φ, действующего в метрическом пространстве (X,ρ). Напомним, что неподвижной точкой φ называют элемент $\xi\in X$, для которого $\varphi(\xi)=\xi$, а отображение φ называют сжимающим, если

$$\exists\beta<1\ \ \forall x,x'\in X\ \ \rho\big(\varphi(x'),\varphi(x)\big)\le\beta\rho(x',x). \tag{1.1}$$

Согласно теореме Банаха [1] *сжимающее отображение имеет в полном метрическом пространстве единственную неподвижную точку, к которой сходятся последовательные приближения* $x_i=\varphi(x_{i-1})$ *для любой начальной точки* x_0.

В силу условия (1.1) для любого $x\in X$ существует $x'\in X$ такой, что

$$\rho\big(x',\varphi(x')\big)\le\beta\rho\big(x,\varphi(x)\big), \tag{1.2}$$

$$\rho(x',x)\le\rho\big(x,\varphi(x)\big). \tag{1.3}$$

Действительно, достаточно положить $x'=\varphi(x)$. Таким образом, условие (1.1) позволяет для любого $x\in X$ определить достаточно «близкий» элемент $x'\in X$ (в том смысле, что отклонение $\rho(x',x)$ удовлетворяет неравенству (1.3)), который «предпочтительнее» для задачи о неподвижной точке (поскольку справедливо неравенство (1.2)). Можно считать точку x' улучшением приближения x к неподвижной точке ξ отображения φ.

Такой взгляд на теорему Банаха позволяет получить следующее ее довольно очевидное обобщение.

Предложение 1.1. *Пусть метрическое пространство* (X,ρ) *является полным, а отображение* $\varphi:X\to X$ *замкнуто и удовлетворяет следующему условию: для некоторых* $\beta\in[0,1)$, $\lambda>0$ *выполнено*

$$\forall x\in X\ \ \exists x'\in X\ \ \rho\big(x',\varphi(x')\big)\le\beta\rho\big(x,\varphi(x)\big),\quad \rho(x',x)\le\lambda\rho\big(x,\varphi(x)\big). \tag{1.4}$$

Тогда отображение φ *имеет неподвижную точку, более того, для любого* $x_0 \in X$ *существует неподвижная точка* ξ *такая, что*

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\lambda}{1-\beta}\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big). \tag{1.5}$$

Доказательство. Условие (1.4) позволяет для произвольного $x_0 \in X$ определить итерационную последовательность $\{x_i\} \subset X$ такую, что

$$\rho\big(x_{i+1}, \varphi(x_{i+1})\big) \leq \beta\rho\big(x_i, \varphi(x_i)\big), \quad \rho(x_{i+1}, x_i) \leq \lambda\rho\big(x_i, \varphi(x_i)\big).$$

В силу этих неравенств при любом $i = 0, 1, \ldots$ имеем

$$\rho\big(x_i, \varphi(x_i)\big) \leq \beta^i\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big), \quad \rho\big(x_{i+1}, x_i\big) \leq \lambda\beta^i\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big). \tag{1.6}$$

Из второго в (1.6) неравенства следует, что для любых $i = 0, 1, \ldots,$ $m = 1, 2, \ldots$ выполнено

$$\rho(x_{i+m}, x_i) \leq \sum_{j=0}^{m-1}\rho(x_{i+j}, x_{i+j+1}) \leq \lambda\sum_{j=0}^{m-1}\beta^{i+j}\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big) \leq \frac{\lambda}{1-\beta}\beta^i\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big). \tag{1.7}$$

Таким образом, последовательность $\{x_i\}$ фундаментальная и сходится в X к некоторому элементу ξ. Теперь, согласно первому в (1.6) неравенству, получаем $\rho\big(x_i, \varphi(x_i)\big) \to 0$. Следовательно, $\varphi(x_i) \to \xi$. А поскольку отображение φ замкнуто, имеем $\varphi(\xi) = \xi$.

Из (1.7) при $i = 0$ и любом натуральном m получаем оценку

$$\rho(x_m, x_0) \leq \frac{\lambda}{1-\beta}\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big).$$

Следовательно, неподвижная точка ξ отображения φ, являющаяся пределом последовательности $\{x_i\}$, удовлетворяет неравенству (1.5). □

Замечание 1.1. В отличие от теоремы Банаха в предложении 1.1 нельзя утверждать единственность неподвижной точки. Для ее единственности достаточно дополнительно потребовать, чтобы

$$\forall x, u \in X \quad u \neq x \ \Rightarrow \rho(u, x) \neq \rho\big(\varphi(u), \varphi(x)\big).$$

Продемонстрируем пример вещественной функции, удовлетворяющей условиям предложения 1.1 и имеющей две неподвижные точки.

Пример 1.1. Пусть на $X = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ определена кубическая функция $\varphi(x) = x^3$ (очевидно $\varphi : X \to X$). Проверим для этой функции условие (1.4). Положим $x' = \sqrt[3]{x}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\rho\big(x, \varphi(x)\big) = |x^3 - x|, \quad \rho\big(x', \varphi(x')\big) = |x - x^{1/3}|,\\
&\rho\big(x', \varphi(x')\big) = \frac{|x^{1/3}||x^2-1|}{|x^{4/3} + x^{2/3} + 1|} \leq \frac{|x||x^2-1|}{3} = \frac{1}{3}\rho\big(x, \varphi(x)\big),\\
&\rho(x', x) = |x - x^{1/3}| = \rho\big(x', \varphi(x')\big) \leq \frac{1}{3}\rho\big(x, \varphi(x)\big).
\end{aligned}$$

Итак, условие (1.4) выполнено с константами $\lambda = \beta = 1/3$. Согласно предложению 1.1 для любого $x_0 \in X$ существует неподвижная точка ξ рассматриваемой функции, для которой справедливо неравенство

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{1}{2}|x_0^3 - x_0|.$$

При этом функция φ имеет две неподвижные точки -1 и 1.

Используемая в предложении 1.1 идея аналогичная идее, предложенной А. В. Арутюновым в [8] к задаче о минимуме ограниченной функции $U : X \to \mathbb{R}$ (т. е. удовлетворяющей для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ неравенству $U(x) \geq \gamma$ при всех $x \in X$). В этой работе ведено следующее *условие типа Каристи*:

(k) *существует $k > 0$ такое, что для любого $x \in X$, если $U(x) \neq \gamma$, то существует $x' \in X$, $x' \neq x$, который удовлетворяет неравенству*

$$U(x') \leq U(x) - k\rho(x, x').$$

Согласно [8, теорема 3]), *если пространство X полное, функция $U : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу и удовлетворяет условию* (k), *то для любого $x_0 \in X$ существует $\xi \in X$ такой, что*

$$U(\xi) = \gamma, \quad \rho(x_0, \xi) \leq \frac{1}{k}\big(U(x_0) - \gamma\big). \tag{1.8}$$

Следующее предложение 1.2 показывает, что условие (k) можно трактовать, как возможность улучшить любое приближение x к точке минимума функции U.

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Если для некоторых $\beta \in [0, 1)$, $\lambda > 0$ справедливо соотношение*

$$\forall x \in X \quad \exists x' \in X \quad U(x') - \gamma \leq \beta\big(U(x) - \gamma\big), \quad \rho(x', x) \leq \lambda\big(U(x) - \gamma\big), \tag{1.9}$$

то выполнено условие (k), *где $k = \lambda^{-1}(1 - \beta)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено (1.9). Тогда для любого $x \in X$ существует $x' \in x$ такой, что

$$\begin{aligned} U(x) - \gamma &= \beta\big(U(x) - \gamma\big) + (1 - \beta)\big(U(x) - \gamma\big) \\ &\geq U(x') - \gamma + \frac{1 - \beta}{\lambda}\rho(x', x) = U(x') - \gamma + k\rho(x', x), \end{aligned}$$

т. е. выполнено условие (k). $\square$

Из [8, теорема 3], используя предложение 1.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Если пространство X полное, функция $U : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу и для некоторых $\beta \in [0, 1)$, $\lambda > 0$ удовлетворяет условию* (1.9), *то для любого $x_0 \in X$ существует $\xi \in X$ такой, что*

$$U(\xi) = \gamma, \quad \rho(x_0, \xi) \leq \frac{1 - \beta}{\lambda}\big(U(x_0) - \gamma\big).$$

З а м е ч а н и е 1.2. Обратное утверждение к предложению 1.2 имеет место лишь в тривиальном случае, когда в соотношении (1.9) $\beta = 0,\ \ \lambda = k^{-1}(1-\beta) = k^{-1}$. Точнее, справедливо следующее: *если пространство* X *полное, функция* $U : X \to \mathbb{R}$ *полунепрерывна снизу и выполнено условие* (k), *то выполнено соотношение* (1.9) *с константами* $\beta = 0,\ \ \lambda = k^{-1}$.

Это утверждение прямо следует из [8, теорема 3]), если для произвольного $x \in X$ положить элемент x' равным элементу ξ, определяемому соотношениями (1.8).

Следующий пример показывает, что обратное утверждение к предложению 1.2 при других константах $\beta \neq 0,\ \ \lambda = k^{-1}(1-\beta)$ не верно.

П р и м е р 1.2. Пусть $X = [0,1],\ \ U(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (0,1], \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ Заданная здесь функция $U : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу, $\gamma = 0$ и выполнено условие (k) с константой $k \geq 1$. Для $x = 1$ неравенство $U(x') < U(x)$ имеет место только при $x' = 0$. Поэтому для справедливости второго в (1.9) неравенства

$$1 = \rho(x', x) \leq \lambda\big(U(x) - \gamma\big) = \lambda$$

необходимо, чтобы выполнялось $\lambda \geq 1$. А так как еще должно выполняться равенство $\lambda = k^{-1}(1-\beta) \leq 1-\beta$, то возможен лишь один набор коэффициентов: $\beta = 0,\ \ \lambda = k^{-1}$.

В [8] показано, что результаты о минимуме функции U позволяют исследовать неподвижные точки и точки совпадения отображений. Действительно, точки совпадения отображения $\varphi : X \to X$ являются точками, в которых функция

$$U : X \to \mathbb{R},\ \ U(x) = \rho\big(x, \varphi(x)\big),$$

достигает своего минимального значения, равного 0. Легко заметить, что условие (1.9), примененное к такой функции U, равносильно условию (1.4).

Применим еще условие (1.9) к исследованию разрешимости уравнений. Пусть заданы метрические пространства X, Y и определены отображения $f, \varphi : X \to Y$. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1.10}$$

относительно неизвестного $x \in X$. Решение этого уравнения называют *точкой совпадения отображений* f, φ.

Очевидно, множество решений уравнения (1.10) совпадает с множеством точек, в которых функция

$$U : X \to \mathbb{R},\ \ U(x) = \rho\big(f(x), \varphi(x)\big), \tag{1.11}$$

достигает своего минимального значения, равного 0. Для этой функции справедливо соотношение (1.9) в том и только том случае, если

$$\forall x \in X\ \ \exists x' \in X\ \ \rho\big(f(x'), \varphi(x')\big) \leq \beta\rho\big(f(x), \varphi(x)\big),\ \ \rho(x', x) \leq \lambda\rho\big(f(x), \varphi(x)\big). \tag{1.12}$$

П р е д л о ж е н и е 1.3. *Пусть метрическое пространство* (X, ρ) *является полным, отображения* $f, \varphi : X \to Y$ *для некоторых* $\beta \in [0,1),\ \ \lambda > 0$ *удовлетворяет условию* (1.12), *определенная формулой* (1.11) *функция* U *полунепрерывна снизу. Тогда* *уравнение* (1.10) *разрешимо, более того, для любого* $x_0 \in X$ *существует решение* $x = \xi$ *уравнения* (1.10) *такое, что*

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\lambda}{1-\beta} \rho\big(f(x_0), \varphi(x_0)\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение вытекает из следствия 1.1. □

Частным случаем уравнения (1.10) является уравнение

$$f(x) = y, \tag{1.13}$$

в котором правая часть — заданный элемент $y \in Y$. Если в предложении 1.3 положить функцию φ постоянной: $\varphi(x) \equiv y$, то получим следующие условия разрешимости уравнения (1.13)

Следствие 1.2. *Пусть метрическое пространство* (X, ρ) *является полным, отображение* $f : X \to Y$ *для некоторых* $\beta \in [0, 1)$, $\lambda > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\forall x \in X \ \ \exists x' \in X \ \ \rho\big(f(x'), y\big) \leq \beta \rho\big(f(x), y\big), \quad \rho(x', x) \leq \lambda \rho\big(f(x), y\big),$$

функция $U : X \to \mathbb{R}$, $U(x) = \rho\big(f(x), y\big)$ *полунепрерывна снизу. Тогда уравнение* (1.13) *разрешимо, более того, для любого* $x_0 \in X$ *существует решение* $x = \xi$ *уравнения* (1.13) *такое, что*

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\lambda}{1-\beta} \rho\big(f(x_0), y\big).$$

2. Улучшение приближений в частично упорядоченном пространстве

К исследованию различных задач в частично упорядоченных пространствах также применимы идеи улучшения приближений к решению, аналогичные описанным в разделе 1. Здесь мы сформулируем основанные на этой идее результаты о разрешимости уравнений, о минимуме отображений в частично упорядоченном пространстве. Также мы покажем, что из этих результатов выводятся соответствующие предложения для метрических пространств, полученные в разделе 1.

Пусть $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \preceq)$, $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}, \preceq)$, — частично упорядоченные пространства. Вначале рассмотрим задачу о минимуме отображения $U : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Для множества $\Omega \subset \mathcal{Y}$ определим *множество минимальных элементов*

$$\mathrm{Min}_{\mathcal{Y}} \Omega = \{\overline{y} \in \mathcal{Y} : \forall \omega \in \Omega \ \ \omega \not\prec \overline{y}\}.$$

В случае $\Omega = \mathcal{Y}$ будем обозначать это множество через $\mathrm{Min}\,\mathcal{Y}$.

Определим аналог условия (k) для отображений частично упорядоченных пространств — условие

(K) *для любого* $x \in \mathcal{X}$, *если* $U(x) \notin \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$, *то существует* $x' \in \mathcal{X}$ *такой, что*

$$x' \prec x, \quad U(x') \prec U(x). \tag{2.1}$$

Близкое определение было дано в работе [12], в нем предполагалось существование элемента x', удовлетворяющего (2.1), если $U(x) \notin \mathrm{Min}\mathcal{Y}$ (в сформулированном здесь условии (K) предполагается, что такой x' существует, если $U(x) \notin \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$).

Теорема 2.1. *Пусть отображение* $U : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *удовлетворяет условию* (K) *и выполнено условие*

(S) *для произвольной бесконечной цепи* $S \subset \mathcal{X}$, *сужение на которую отображения* U *является строго изотонным, существует* $z \in \mathcal{X}$ *такой, что*

$$z \prec x \text{ и } U(z) \prec U(x) \text{ при всех } x \in S, \ x \neq z.$$

Тогда для любого $x_0 \in \mathcal{X}$ *существует* $\xi \in \mathcal{X}$ *такой, что*

$$\xi \preceq x_0, \quad U(\xi) \in \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X}), \quad U(\xi) \preceq U(x_0). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}$. В случае $U(x_0) \in \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$ утверждение теоремы очевидно справедливо, искомый элемент $\xi = x_0$.

Рассмотрим нетривиальную ситуацию, когда $U(x_0) \notin \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$. Определим в $\mathcal{X}$ следующее бинарное отношение

$$\forall x, u \in \mathcal{X} \ \ u \lhd x \ \Leftrightarrow \ u \prec x \text{ и } U(u) \prec U(x).$$

Это отношение задает в $\mathcal{X}$ частичный порядок. Относительно этого порядка, согласно теореме Хаусдорфа, существует максимальная цепь $S \subset X$, содержащая точку x_0. Если эта цепь конечна: $S = \{x_0, x_1, \ldots x_k\}$, где $x_i \lhd x_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$, то положим $\xi := x_k$. Имеем $\xi \in S$ и $\xi \unlhd x$ при остальных $x \in S$. Если цепь S бесконечна, то из предположения (S) следует, что относительно исходного порядка $\preceq$ эта цепь имеет нижнюю границу ξ такую, что $\xi \unlhd x$ при всех $x \in S$.

Для определенного таким образом элемента ξ (и в случае конечной, и в случае бесконечной цепи S) выполнено следующее. Если $U(\xi) \notin \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$, то из предположения (K) следует существование элемента $\overline{x} \lhd \xi$. Для любого $x \in S$ имеем $\overline{x} \unlhd x$, а это противоречит максимальности цепи S. Итак, нижняя граница ξ максимальной цепи S удовлетворяет требуемому соотношению (2.2). □

Теорема 2.1 близка́ результату [12, Theorem 3.1] о достижении функцией U минимальной точки всего пространства $\mathcal{Y}$, а приведенное здесь доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству [12, Theorem 3.1].

Теперь продемонстрируем, как из теоремы 2.1 можно вывести утверждения о минимуме функции, о разрешимости уравнений в метрическом пространстве, приведенные в разделе 1. Вначале докажем [8, теорема 3]).

Пусть метрическое пространство $X = (X, \rho)$ *полное, функция* $U : X \to \mathbb{R}$ *полунепрерывна снизу и удовлетворяет условию* (k). *Покажем, что для любого* $x_0 \in X$ *существует* $\xi \in X$, *удовлетворяющий соотношениям* (1.8).

Определим на метрическом пространстве X отношение порядка

$$\forall x, u \in X \ \ u \preceq x \ \Leftrightarrow \ U(u) \leq U(x) - k\rho(x, u)$$

(такой порядок предложен А. Брондстедом в [13], о его применении к нахождению условий существования в метрическом пространстве минимума функции см., например, [12, §3.2]). Теперь полагаем $\mathcal{X} := (X, \preceq)$, $\mathcal{Y} := (\mathbb{R}, \leq)$. Рассматриваемое в этих пространствах отображение $U : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ очевидно удовлетворяет условию (K). Проверим справедливость условия (S). Пусть задана бесконечная цепь $S \subset \mathcal{X}$, сужение на которую отображения U

является строго изотонным. Тогда $U(S)$ является ограниченной снизу цепью в $\mathbb{R}$. Пусть $c := \inf U(S)$, определим убывающую последовательность $\{c_i\} \subset U(S)$, сходящуюся к c, и соответствующую последовательность $\{x_i\} \subset S$, $U(x_i) = c_i$. Так как для любых натуральных $i < j$ выполнено

$$x_i \prec x_j \;\Leftrightarrow\; \rho(x_i, x_j) \leq U(x_i) - U(x_j),$$

последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Пусть z — ее предел. В силу полунепрерывности снизу функции U выполнено $U(z) \leq c$. Поэтому

$$\forall i < j \;\; \rho(x_i, x_j) \leq U(x_i) - U(z) \;\Rightarrow\; \rho(x_i, z) \leq U(x_i) - U(z).$$

Итак, z — нижняя граница последовательности $\{x_i\}$, а следовательно и цепи S, причем для любого $x \in S$, $x \neq z$ выполнено $U(z) < U(x)$.

Поскольку выполнены условия (K) и (S), согласно теореме 2.1 существует элемент ξ, удовлетворяющий соотношениям (2.2), которые для определенных здесь упорядоченных пространств равносильны соотношениям (1.8).

Из теоремы 2.1 выводится не только [8, теорема 3], но, очевидно, и ее следствия о разрешимости уравнений в метрических пространствах (в частности, предложение 1.3).

В заключение этого раздела сформулируем еще утверждения об уравнении (1.10) (определяющем точку совпадения отображений) и его частном случае — уравнении (1.13), которые теперь рассмотрим не в метрических, а в частично упорядоченных пространствах. Как и выше, наш подход основан на возможности получить улучшения приближений к решениям этих уравнений.

Итак, пусть $f, \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Определим отображение

$$U : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^2, \;\; \forall x \in \mathcal{X} \;\; U(x) = \big(f(x), \varphi(x)\big). \tag{2.3}$$

Определим в произведении $\mathcal{Y}^2$ отношение порядка, полагая для $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}^2$ и $y' = (y_1', y_2')$, $y \neq y'$ выполненным неравенство $(y_1', y_2') \prec (y_1, y_2)$, если

$$y_2 \neq y_1, \;\; y_1' \preceq y_1, \;\; y_2' \preceq y_2$$

(так как $y \neq y'$, по крайней мере одно из этих двух неравенств должно быть строгим).

Применяя к отображению (2.3) теорему 2.1, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Пусть для любого $x \in \mathcal{X}$ такого, что $f(x) \neq \varphi(x)$ существует $x' \in \mathcal{X}$, для которого $U(x') \prec U(x)$, т. е. $f(x') \preceq f(x)$ и $\varphi(x') \preceq \varphi(x)$, причем хотя бы одно из этих двух неравенств строгое. Пусть также выполнено условие* (S). *Тогда для любого $x_0 \in \mathcal{X}$ существует решение $x = \xi \in \mathcal{X}$ уравнения* (1.10), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\xi \preceq x_0, \;\; f(\xi) \preceq f(x_0), \;\; \varphi(\xi) \preceq \varphi(x_0).$$

Доказательство. Проверим условие (K) для отображения U, определенного соотношением (2.3). Пусть $U(x) \notin \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}^2} U(\mathcal{X})$. Тогда в силу определения порядка в $\mathcal{Y}^2$ выполнено $f(x) \neq \varphi(x)$. Согласно принятым предположениям существует x' такой, что $x' \prec x$ и $U(x') \prec U(x)$, т. е. условие (K) выполнено. Согласно теореме 2.1 для любого $x_0 \in \mathcal{X}$ существует элемент $\xi \in \mathcal{X}$, $\xi \prec x_0$ такой, что $U(\xi) \in \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$ и $U(\xi) \preceq U(x_0)$.

Очевидно, $f(\xi)=\varphi(\xi)$, иначе бы существовал элемент $\xi'\in\mathcal{X}$, $\xi'\prec\xi$, для которого $U(\xi')\prec U(\xi)$, т. е. значение $U(\xi)$ не было бы минимальным. □

Из следствия 2.1 выводятся условия разрешимости уравнения (1.13), так как это уравнение — частный случай уравнения (1.10), в котором $\varphi(x)\equiv y$.

Следствие 2.2. *Пусть для любого $x\in\mathcal{X}$ такого, что $f(x)\neq y$ существует $x'\in\mathcal{X}$, для которого $f(x')\prec f(x)$. Пусть также для произвольной бесконечной цепи $S\subset\mathcal{X}$, обладающей свойствами:*

$$\forall x\in S\ \ f(x)\neq y\quad \text{и}\quad \forall x,u\in S\ \ u\prec x\ \Rightarrow\ f(u)\prec f(x),$$

существует $z\in\mathcal{X}$ такой, что $z\prec x$ и $f(z)\prec f(x)$ при всех $x\in S$, $x\neq z$. Тогда для любого $x_0\in\mathcal{X}$ существует решение $x=\xi\in\mathcal{X}$ уравнения (1.13), удовлетворяющее неравенствам $\xi\preceq x_0$, $f(\xi)\preceq f(x_0)$.

3. Выполнимость предикатов

Сформулированные выше и некоторые другие утверждения можно записать в виде следующего утверждения о выполнимости предиката, определенного на частично упорядоченном пространстве.

Пусть $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\preceq)$ — частично упорядоченное пространство, и на этом пространстве задан двухместный предикат — отображение $\Phi:\mathcal{X}^2\to\{0,1\}$ (где 1 означает «истину», а 0 — «ложь»). Будем предполагать выполненным следующее условие

$$\forall x,x',x''\in\mathcal{X}\ \ \Phi(x',x)=1,\ \ \Phi(x'',x')=1\ \Rightarrow\ \Phi(x'',x)=1. \tag{3.1}$$

Определим предикат $F:\mathcal{X}\to\{0,1\}$ соотношением $F(x)=\Phi(x,x)$, $x\in\mathcal{X}$. Следующее утверждение о выполнимости предиката F сформулировано без доказательства в [14]. Мы приведем это утверждение с полным доказательством и покажем, что из него следуют полученные выше и некоторые другие утверждения о разрешимости уравнений и достижении минимума отображений.

Теорема 3.1. *Пусть для предиката Φ справедливы соотношения (3.1) и выполнены следующие условия:*

(i) *для любого $x\in\mathcal{X}$ существует $x'\in\mathcal{X}$ такой, что $x'\preceq x$ и $\Phi(x',x)=1$;*

(ii) *любая бесконечная цепь $S\subset\mathcal{X}$, для любых двух элементов которой $x,x'\in S$, $x'\prec x$, справедливо $\Phi(x',x)=1$, имеет нижнюю границу $w\in\mathcal{X}$, удовлетворяющую соотношениям $\Phi(w,x)=1$ при всех $x\in S$, $x\neq w$.*

Тогда множество $F^{-1}(1)=\{x\in\mathcal{X}:\ F(x)=1\}$ не пусто, и более того, для любого $x_0\in\mathcal{X}$ существует $\xi\in\mathcal{X}$ такой, что

$$\xi\preceq x_0\quad \text{и}\quad F(\xi)=1. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $x_0\in\mathcal{X}$. Если $F(x_0)=1$, то утверждение теоремы справедливо, $\xi=x_0$. Поэтому полагаем, что $F(x_0)\neq 1$.

Определим в $\mathcal{X}$ следующее бинарное отношение

$$\forall x,u\in\mathcal{X}\ \ u\lhd x\ \Leftrightarrow\ u\prec x\ \text{и}\ \Phi(u,x)=1.$$

Это отношение, очевидно, антисимметрично и, в силу (3.1) еще и транзитивно, т. е. является в $\mathcal{X}$ отношением порядка. Относительно этого порядка, согласно теореме Хаусдорфа, существует максимальная цепь $S \subset X$, содержащая заданную точку x_0. В случае, если эта цепь конечна: $S = \{x_0, x_1, \dots x_k\}$, где $x_i \lhd x_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$, положим $\xi := x_k$. При таком определении имеем $\xi \in S$ и $\xi \unlhd x$ при остальных $x \in S$. Пусть цепь S бесконечна. Относительно исходного порядка $\preceq$ множество S также является цепью, и из предположения (ii) следует, что она имеет относительно порядка $\preceq$ нижнюю границу ξ, такую, что $\Phi(\xi, x) = 1$ при всех $x \in S$, $x \neq \xi$. Следовательно, $\xi \unlhd x$ при всех $x \in S$.

Для определенного таким образом элемента ξ (и в случае конечной, и в случае бесконечной цепи S) выполнено следующее. Если $F(\xi) \neq 1$, то из предположения (i) следует существование элемента $\overline{x} \lhd \xi$. Для любого $x \in S$ имеем $\overline{x} \unlhd x$, а это противоречит максимальности цепи S. Итак, нижняя граница ξ максимальной цепи S удовлетворяет требуемому соотношению (3.2). □

Покажем, что из теоремы 3.1 выводится теорема 2.1 о минимуме отображения $U : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (а следовательно, и все другие полученные выше утверждения об отображениях частично упорядоченных пространств и об отображениях метрических пространств).

Итак, пусть выполнены предположения теоремы 2.1, т. е. отображение U удовлетворяет условиям (K) и (S). Определим предикат $\Phi : X^2 \to \{0, 1\}$, полагая выполненным $\Phi(x', x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \notin \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$, $U(x') \prec U(x)$ или $x \in \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$, $x' = x$. Очевидно, что определенный здесь предикат Φ удовлетворяет соотношениям (3.1), а условие (K) для отображения U равносильно условию (i) для предиката Φ. Также, несложно проверить, что при таком определении предиката Φ он удовлетворяет условию (ii) тогда и только тогда, когда для отображения U выполнено условие (S). Итак, согласно теореме 3.1 существует $\xi \preceq x_0$ такой, что $F(\xi) = 1$. Полученное равенство по определению предиката Φ означает, что $\xi \in \mathrm{Min}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Утверждение теоремы 2.1 получено.

Так как из теоремы 2.1 выводятся все другие полученные выше утверждения, то они становятся следствием и более общей теоремы 3.1. Конечно, можно эти утверждения получить прямо из теоремы 3.1. Продемонстрируем такой прямой вывод из теоремы 3.1 предложения 1.1.

Пусть выполнены предположения предложения 1.1. Определим в метрическом пространстве (X, ρ) отношение порядка

$$\forall u, x \in X \ \ u \prec x \ \Leftrightarrow \ \rho\big(x, \varphi(x)\big) > 0, \ \ \rho\big(u, \varphi(u)\big) \le \beta\rho\big(x, \varphi(x)\big).$$

Полученное таким образом частично упорядоченное пространство обозначим символом $\mathcal{X}$. Теперь, если определить предикат $\Phi : \mathcal{X}^2 \to \{0, 1\}$ соотношениями

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \ \ \Phi(x, x) = 1 \ \Leftrightarrow \ x = \varphi(x), \\ &\forall u, x \in X \ \ u \neq x, \ \ \Phi(u, x) = 1 \ \Leftrightarrow \ \rho(u, x) \le \frac{\lambda}{1-\beta}\Big(\rho\big(x, \varphi(x)\big) - \rho\big(u, \varphi(u)\big)\Big), \end{aligned}$$

то в такой конкретной ситуации теорема 3.1 становится равносильной предложению 1.1. Докажем это.

В силу (1.4) для любого $x \in X$ существует $x' \in X$ такой, что

$$\rho(x', x) \le \frac{\lambda}{1-\beta}\Big(\rho\big(x, \varphi(x)\big) - \beta\rho\big(x, \varphi(x)\big)\Big) \le \frac{\lambda}{1-\beta}\Big(\rho\big(x, \varphi(x)\big) - \rho\big(x', \varphi(x')\big)\Big),$$

т. е. $\Phi(x', x) = 1$. Условие (i) выполнено.

С целью проверки условия (ii) рассмотрим бесконечную цепь $S \subset \mathcal{X}$, для любых двух элементов которой $x, x' \in S$, $x' \prec x$ справедливо $\Phi(x', x) = 1$. Если в S есть наименьший элемент, то условие (ii) очевидно выполнено. Поэтому полагаем, что в S нет наименьшего элемента. Покажем, что для любого элемента x цепи S существует *соседний элемент* $x' \in S$, т. е. такой, что $x' \prec x$ и для любого $u \in S$, если $u \prec x$, то $u \preceq x'$. В противном случае существуют $u_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие неравенствам $u_1 \prec u_2 \prec \ldots \prec x$. Следовательно, при любом $i = 1, 2, \ldots$ справедливо

$$\rho\big(u_1, \varphi(u_1)\big) \leq \beta\rho\big(u_2, \varphi(u_2)\big) \leq \beta^{i-1}\rho\big(u_i, \varphi(u_i)\big) \leq \beta^i\rho\big(x, \varphi(x)\big),$$

поэтому $\rho\big(u_1, \varphi(u_1)\big) = 0$. Аналогично получаем $\rho\big(u_2, \varphi(u_2)\big) = 0$, но это противоречит неравенству $u_1 \prec u_2$.

Зафиксируем любой $x_0 \in S$. Как показано выше, у этого элемента существует соседний элемент, обозначим его через x_1, и цепь S не содержит элементов из интервала $\{x \in X : x_1 < x < x_0\}$. Затем определим элемент $x_2 \in S$, соседний с x_1. Продолжая такие построения, определим убывающую последовательность $\{x_i\} \subset S$. Этой последовательностью исчерпывается вся цепь $\widehat{S} = \{x \in S : x \preceq x_0\}$. Действительно, в противном случае, существует $\overline{x} \in S$, для которого $\overline{x} \leq x_i$, $i = 1, 2, \ldots$. В силу определения порядка, выполнено

$$\rho\big(\overline{x}, \varphi(\overline{x})\big) \leq \rho\big(x_i, \varphi(x_i)\big) \leq \beta\rho\big(x_{i-1}, \varphi(x_{i-1})\big) \leq \beta^i\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big),$$

следовательно, $\rho\big(\overline{x}, \varphi(\overline{x})\big) = 0$. Элемент меньший чем $\overline{x} \in S$ в пространстве $\mathcal{X}$ не существует, а это противоречит тому, что в S нет наименьшего элемента.

Так как для последовательности $\widehat{S} = \{x_i\}$ выполнены неравенства (1.7), эта последовательность является фундаментальной и сходится в полном пространстве X к некоторому элементу w. Вследствие неравенства $\rho\big(x_i, \varphi(x_i)\big) \leq \beta^i\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big)$ последовательность $\{\varphi(x_i)\}$ также сходится к w. А поскольку отображение φ замкнуто, имеем $\varphi(w) = w$.

Так как $\rho\big(w, \varphi(w)\big) = 0$, в силу определения порядка, выполнено $x_i \prec w$ при любом натуральном i. Из (1.7) получаем

$$\forall i \ \ \rho(x_i, x_0) \leq \frac{\lambda}{1-\beta}\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big) \ \Rightarrow \ \rho(w, x_0) \leq \frac{\lambda}{1-\beta}\rho\big(x_0, \varphi(x_0)\big).$$

Следовательно, $\Phi(z, x_0) = 1$. Аналогично доказывается, что $\Phi(z, x_i) = 1$ при всех i. Итак, условие (ii) выполнено.

References

[1] S. Banach, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, *Fund. Math*, 1922, № 3, 133–181.

[2] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[3] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “Точки совпадения и обобщенные точки совпадения двух многозначных отображений”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **308**, МИАН, М., 2020, 42–49; англ. пер.: A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence Points and Generalized Coincidence Points of Two Set-Valued Mappings”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **308** (2020), 35–41.

[4] A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, “On the stability of fixed points and coincidence points of mappings in the generalized Kantorovichs theorem”, *Topology and its Applications*, **275** (2020), Article ID 107030.

[5] Е.Р. Аваков, А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45** (2009), 613–634; англ. пер.:E.R. Avakov, A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiĭ, “Covering mappings and their applications to differential equations not solved with respect to the derivative”, *Differential Equations*, **45** (2009), 627–649.

[6] Т.В. Жуковская , В. Мерчела , А.И. Шиндяпин, “О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 18–24. [T.V. Zhukovskaia, W. Merchela, A.I. Shindiapin, “On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 18–24 (In Russian)].

[7] В. Мерчела, “К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, “About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].

[8] А.В. Арутюнов, “Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 30–44; англ. пер.:A.V. Arutyunov, “Caristi’s condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 24–37.

[9] A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[10] A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **201** (2016), 330–343.

[11] С. Бенараб, З.Т. Жуковская, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский, “О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:11 (2020), 1471–1482. [S. Benarab, Z.T. Zhukovskaia, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, “O funktsional’nyh i differentsial’nyh neravenstvah i ih prilozhenijah k zadacham upravlenija”, *Differential Equations*, **56**:11 (2020), 1471–1482 (In Russian)].

[12] A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, “Caristi-Like Condition and the Existence of Minima of Mappings in Partially Ordered Spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**:1 (2019), 48–61.

[13] A. Brondsted, “On a lemma of Bishop and Phelps”, *Pasif. J. Math*, **55** (1974), 335–341.

[14] Т.В. Жуковская, Е.С. Жуковский, “О выполнимости предикатов, заданных на частично упорядоченных пространствах”, *Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)*, Материалы IX Международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Александра Ивановича Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина (Тамбов, 12–16 октября 2020 г.), Тезисы докладов, Издательский дом «Державинский», Тамбов, 2020, 34–36. [T.V. Zhukovskaia, E.S. Zhukovskiy, “Satisfaction of predicates given on partially ordered spaces”, *Kolmogorov Readings. General Control Problems and their Applications (GCP–2020)*, Proceedings of the IX International Scientific Conference, dedicated to the 70th anniversary of the birth of Alexander Ivanovich Bulgakov and the 90th anniversary of the Institute of mathematics, physics and information technologies of Tambov state University named after G.R. Derzhavin (Tambov, October 12-16, 2020), Abstracts, Derzhavinsky Publishing House, Tambov, 2020, 34–36 (In Russian)].

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация.
E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Серова Ирина Дмитриевна, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковский Евгений Семенович
E-mail: zukovskys@mail.ru

Поступила в редакцию 27.08.2020 г.
Поступила после рецензирования 17.11.2020 г.
Принята к публикации 19.11.2020 г.

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Evgeny S. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Irina D. Serova, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgeny S. Zhukovskiy
E-mail: zukovskys@mail.ru

Received 27.08.2020
Reviewed 17.11.2020
Accepted for press 19.11.2020